**Le fonti della matematica egizia antica**

- Papiro di Rhind (o Ahmes) (copia del XVI sec. a.C. di un originale del XIX secolo a.C.)
- Papiro di Kahun (XIX secolo a.C.?)
- Papiro di Mosca (XIX secolo a.C.)
- Papiro di Reisner I (XIX secolo a.C.)
- Papiro di Berlino (XVIII secolo a.C.?)
- Rotolo di cuoio (XVII secolo a.C.?)

Delle fonti elencate, solo la prima può dirsi completa. Le altre ci sono pervenute sotto forma di frammenti. Sono scritti redatti in ieratico.

Ecco l'indice del papiro di Rhind:

- Tavola di divisione di 2 per i numeri dispari sino a 101
- Problemi 1-6: Suddividere 1, 2, 6, 7, 8, 9 pani in 10 parti
- Problemi 7-20: Prodotti di frazioni unitarie
- Problemi 21-23: Completamento all'unità
- Problemi 24-34: Ricerca di una quantità ignota (*aha*)
- Problemi 39-40: Divisioni di pani
- Problemi 41-46: Volumi di depositi cilindrici
- Problema 47: Divisione di 100 *hekat*
- Problemi 48-55: Problemi geometrici vari
- Problemi 56-60: Il *seket* della piramide
- Problemi 61-84: Miscellanea

Le altre fonti contengono problemi e tavole di tipo analogo ai precedenti.
Successivi documenti (dal III secolo a.C.), redatti in demotico, risentono dell'influenza greca.

Ecco la traduzione dell'introduzione del papiro di Rhind:

*Metodo di calcolo per accedere alla conoscenza di tutte le cose esistenti e di tutti gli oscuri segreti. Questo libro fu copiato nell'anno 33, nel quarto mese della stagione dell'inondazione, sotto la maestà del re dell'Alto e del Basso Egitto Auserre* (Apopi, 1585-1542 a.C.) *dotato di vita, in somiglianza con gli scritti di antica fattura del tempo del re dell'Alto e del Basso Egitto Nemaetre* (Amenemhat III, 1884-1797). *È lo scriba Ahmes che copia questo scritto.*

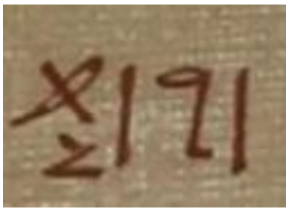
La nostra traduzione differisce da quella fornita da altri autori (vedi, tra gli altri, A. Buffum Chace, 1927) che si apre con l'espressione *calcolo accurato*. Il testo originale (nella trascrizione geroglifica, per noi più leggibile rispetto alla versione originale in ieratico), inizia con questo gruppo di caratteri:

Quello di sinistra, che riproduce una testa sovrapposta al numerale indicante l'unità, si pronuncia *tep* ed assume vari significati, oltre a quello letterale: *capo, esempio, il migliore, primo, superiore, anteriore, inizio.*
Quello di destra si compone del valore fonetico *ḥeseb* (*ḥsb*) – altre volte accompagnato dalla successione dei tre suoni consonantici  - a cui si unisce, sotto, il determinativo del *calcolo* o *scrittura*.
Chiaramente, il primo carattere potrebbe essere interpretato come aggettivo, nel senso di *migliore* e quindi *accurato*. Tuttavia, colpisce il fatto che esso compaia da solo all'inizio dello svolgimento della stragrande maggioranza dei problemi presentati nel papiro. Esso è utilizzato per introdurre l'enunciato, ossia il tipo di quesito a cui il testo intende fornire una soluzione. Ciò induce molti a rendere *tep* come *esempio*: il calcolo è svolto con dati numerici particolari, ma deve fungere da *modello* per tutti i problemi di forma analoga. Il termine ***modello***¸ per noi, è imparentato con il concetto di *principio,* che è fonte di un metodo generale, *primo* in quanto posto all'inizio della teoria, come riferimento che tutto precede (*fondamento*) e tutto sovrasta (*assioma*). Tuttavia, ci avverte Michel Guillemot (1992), *non dobbiamo considerare i diversi "problemi" come esempi che servano ad illustrare una teoria debitamente esplicitata. Qui, questa è assente, almeno nel documento. In altre parole, "esempio"deve essere quindi inteso nel senso di azione, di modo d'essere, considerati come passibili di imitazione. Pertanto, gli "esempi" non sono affatto delle regole da seguire imperativamente, bensì dei metodi lasciati ad un certo libero arbitrio*. Sono forme, strutture procedimentali da adattare ai singoli casi, con l'uso della ragione.

Grafia alternativa: 

A volte il carattere  è sostituito dall'omofono  che significa *incrocio, frattura, un quarto.*

Nel testo originale ieratico troviamo:



corrispondente alla scrittura geroglifica 

L'orientazione dei caratteri prescrive la lettura da destra a sinistra.
Un'ultima osservazione: la scrittura fonetica che omette le vocali impone spesso l'uso dei determinativi semantici, onde distinguere tra loro parole la cui pronuncia corrisponde alla stessa sequenza consonantica. Ad esempio, sostituendo, nell'espressione del calcolo *ḥsb,* il rotolo di papiro con un altro carattere  si ottiene il nome (omofono) di un tipo di pane.

Il determinativo del rotolo di papiro compare in altre espressioni contenute nella frase introduttiva del papiro di Rhind. Le elenchiamo di seguito:

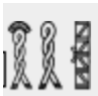
 conoscenza, numero, misura (*rḥ.t*)

 cose (*ntt*)

 cose (*ḫ.t*)

 segreti (*št*ꜣ*.t*)

Ritorna, nel seguito della premessa, nelle espressioni relative al tempo. È anche presente in molti termini a carattere aritmetico:

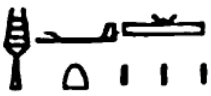
 moltiplicazione/addizione

 addizione

 dimostrazione (calcolo)

 verifica

 calcolo *seqem*

 calcolo *aḥa*

 calcolo *tunnu*

I tre metodi verranno illustrati mediante singoli problemi tratti dal papiro di Rhind.

**Sulle frazioni unitarie**

Una tavola del papiro di Rhind è dedicata all'espressione delle frazioni della forma $\frac{2}{n}$ , con $n$ un intero dispari compreso fra 3 e 101, come somma di frazioni unitarie distinte. Ne riproduciamo di seguito il contenuto, indicando con un soprassegno semplice il numeratore 1, con un soprassegno doppio il numeratore 2:

| $\overline{\overline{n}}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{r}$ | $\overline{s}$ | $\overline{n}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{r}$ | $\overline{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 6 | | | 53 | 30 | 318 | 795 | |
| 5 | 3 | 15 | | | 55 | 30 | 330 | | |
| 7 | 4 | 28 | | | 57 | 38 | 114 | | |
| 9 | 6 | 18 | | | 59 | 36 | 236 | 531 | |
| 11 | 6 | 66 | | | 61 | 40 | 244 | 488 | 610 |
| 13 | 8 | 52 | 104 | | 63 | 42 | 126 | | |
| 15 | 10 | 30 | | | 65 | 39 | 195 | | |
| 17 | 12 | 51 | 68 | | 67 | 40 | 335 | 536 | |
| 19 | 12 | 76 | 114 | | 69 | 46 | 138 | | |
| 21 | 14 | 42 | | | 71 | 40 | 568 | 710 | |
| 23 | 12 | 276 | | | 73 | 60 | 219 | 292 | 365 |
| 25 | 15 | 75 | | | 75 | 50 | 150 | | |
| 27 | 18 | 54 | | | 77 | 44 | 308 | | |
| 29 | 24 | 58 | 174 | 232 | 79 | 60 | 237 | 326 | 790 |
| 31 | 20 | 124 | 155 | | 81 | 54 | 162 | | |
| 33 | 22 | 66 | | | 83 | 60 | 332 | 415 | 498 |
| 35 | 30 | 42 | | | 85 | 51 | 255 | | |
| 37 | 24 | 111 | 296 | | 87 | 58 | 174 | | |
| 39 | 26 | 78 | | | 89 | 60 | 356 | 534 | 890 |
| 41 | 24 | 246 | 328 | | 91 | 70 | 130 | | |
| 43 | 42 | 86 | 129 | 301 | 93 | 62 | 186 | | |
| 45 | 30 | 60 | | | 95 | 60 | 380 | 570 | |
| 47 | 30 | 141 | 470 | | 97 | 56 | 679 | 776 | |
| 49 | 28 | 196 | | | 99 | 66 | 198 | | |
| 51 | 34 | 102 | | | 101 | 101 | 202 | 303 | 606 |

In generale, ogni frazione minore di 1 veniva ricondotta ad una decomposizione di questo tipo. L'idea di fondo è che le frazioni dell'unità sono da considerarsi la controparte dei suoi multipli (decine, centinaia), e dunque, nella rappresentazione di un numero frazionario, esse intervengono come addendi, ma non sottoposti a moltiplicazione (che non corrisponde alla loro natura!): dunque ognuna di esse può comparire al più una volta.
Tra le decomposizioni (non univocamente determinate) gli Egizi tendevano a prediligere quelle corrispondenti ai seguenti criteri:

- Denominatori possibilmente piccoli (nessuno supera 1000)
- Numero possibilmente piccolo di addendi (mai più di quattro)
- Denominatori preferibilmente pari

Questi criteri, rilevabili da uno studio delle fonti, trovano la loro giustificazione nelle esigenze della pratica aritmetica, in quanto:

- la somma di frazioni comporta la moltiplicazione per un denominatore comune;
- la moltiplicazione per una frazione viene effettuata separatamente sui suoi addendi;
- un denominatore pari facilita il raddoppiamento della frazione.

Varie sono le tecniche impiegate per la determinazione delle decomposizioni in frazioni unitarie. A titolo d’esempio, presentiamo quella applicata per $\frac{2}{17}$ . Il primo passo consiste nella moltiplicazione di 17 per varie frazioni, a cominciare da $\frac{2}{3}$, per poi proseguire con quelle ottenute da questa per dimezzamenti successivi. Questa prima parte del procedimento si conclude non appena il prodotto scende al di sotto di 2:

$$\begin{array}{rr}
1 & 17 \\
\bar{\bar{3}} & 11\ \bar{3} \\
\bar{3} & 5\ \bar{\bar{3}} \\
\bar{6} & 2\ \bar{2}\ \bar{3} \\
\checkmark\ \overline{12} & 1\ \bar{4}\ \bar{6} \\
\hline
 & 1\ \bar{4}\ \bar{6}
\end{array}$$

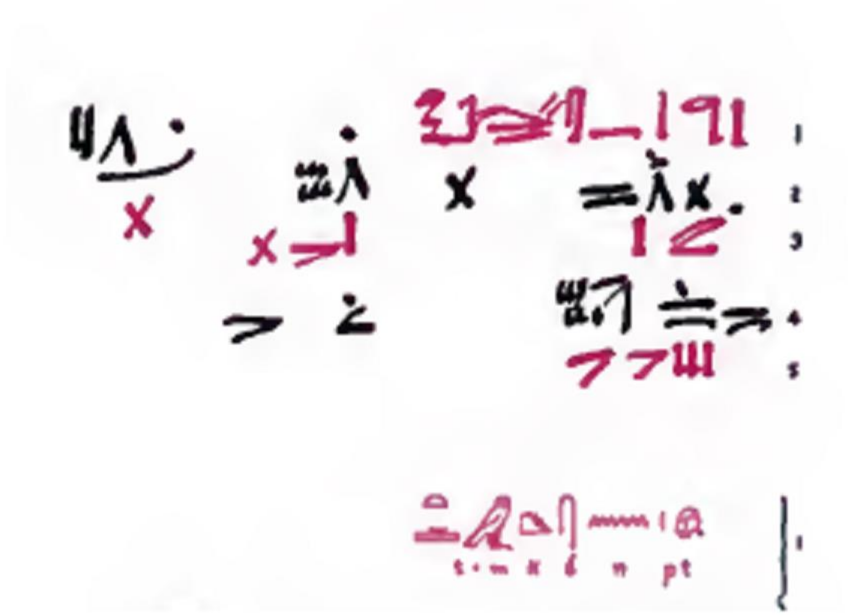
Quindi si determina il complemento a 1 della parte frazionaria. A tal fine si osserva (con il solito metodo basato sulla riduzione ad un comune denominatore) che la somma $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ è pari a $\frac{5}{12}$. Quindi il complemento cercato è $\frac{7}{12}$. Questo numero si decompone facilmente nella somma $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Ne consegue che $\frac{17}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2.$ A questo punto, per ottenere la decomposizione cercata, basta dividere tutte e tre le frazioni a primo membro per 17. Per la prima si interviene sul numeratore, per le altre due sul denominatore, mediante moltiplicazione per 17:

$$\begin{array}{llrr}
1 & 17 & & 17 \\
2 & 34 & & \\
3 & 51 & \checkmark\ \overline{51} & \bar{3} \\
4 & 68 & \checkmark\ \overline{68} & \bar{4} \\
\cline{3-3}
 & & \overline{51}\ \overline{68} &
\end{array}$$

Si ottiene, infine, la decomposizione $\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$.

**Problemi aritmetici del papiro di Rhind**

<u>Problema 7</u> (*seqem*)



In rosso  compare anzitutto l'enunciato del problema (in fondo la traduzione in caratteri geroglifici): *metodo per il completamento (seqem).*

Si tratta di determinare il numero ottenuto aggiungendo alla somma delle frazioni $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ la sua parte pari a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Il papiro riporta la sequenza delle operazioni attraverso uno schema numerico:

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{28}$ |
| | $\boxed{7}$ | $\boxed{1}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{[1]}{56}$ |
| | $\boxed{3\frac{1}{2}}$ | $\boxed{\frac{1}{2}}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{112}$ |
| | $\boxed{1\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ | $\boxed{\frac{1}{4}}$ |
| | *totale* | $\frac{1}{2}$ |

Anzitutto, le due frazioni vengono riportate mentalmente allo stesso denominatore (28): il primo riquadro contiene i corrispondenti nuovi numeratori. Quindi delle stesse due frazioni vengono determinati la metà e un quarto.  Dopo ciascuna di queste operazioni si determinano i nuovi "numeratori" (nei riquadri rossi sottostanti), ossia, ad ogni passo si tiene traccia del numero di ventottesimi ottenuti. Sommando i numeri racchiusi nei riquadri si ottiene il numero complessivo di ventottesimi, precisamente 14. Dunque il risultato è $\frac{1}{2}$.

Problema 21 (*seqem*)

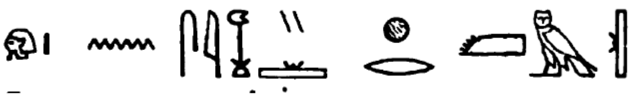
Si dice a te completa :

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{15}$ ad 1

10 1 insieme 11 resto : 4

moltiplica questo : 15 per trovare : 4

Fino a questo punto, l'autore, dopo aver scritto la somma assegnata come $\frac{10}{15}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$, cerca di determinare il complemento a 1, ossia $\frac{4}{15}$ , come somma di frazioni unitarie distinte: questa somma è il *numero che moltiplicato per* 15 *dà* 4. Tale numero viene determinato calcolando, successivamente, il prodotto di 15 per ciascuna delle seguenti frazioni: $\frac{1}{15},\frac{1}{10},\frac{1}{5}$. I prodotti ottenuti sono, nell'ordine, $1, 1\frac{1}{2}, 3$. La somma del primo e del terzo dà 4, come desiderato. Dunque il numero cercato è la somma di $\frac{1}{15}$ e $\frac{1}{5}$. Segue la verifica:



Regola per la verifica e il completamento:

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$ fa 1

Problema 32 (*aḥa*)

È un problema che, per noi, equivarrebbe ad un'equazione di primo grado. L'incognita è detta *aḥa* (mucchio). Riportiamo prima l'enunciato, poi la sua traduzione:

Il mucchio, il suo terzo, il suo quarto, il suo intero, ciò dà : 2

Si tratta di determinare un numero che, moltiplicato per $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, dia come risultato 2. La tecnica risolutiva consiste nel moltiplicare tale numero ripetutamente con vari fattori frazionari, individuando, alla fine, quei prodotti la cui somma restituisce il numero 2. Ciò avviene in due tempi. In una prima fase, vengono calcolati i prodotti con il fattore $\frac{2}{3}$ e quindi con le frazioni da questo ottenute per dimezzamenti successivi. Dopo di ciò ci si accorge che, mentre la somma dei prodotti sin qui ottenuti è minore di 2, un ulteriore passaggio porterebbe ad una somma che supera il 2. Si procede quindi con una sorta di raffinamento del calcolo, che si occupa della determinazione del resto con il ricorso ad un denominatore più piccolo dell'ultimo ottenuto. Per effettuare il procedimento, si esegue preventivamente un cambio di ordine di grandezza, tramite una moltiplicazione che riconduce il calcolo a numeri interi.

Prima fase:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ |
| \ $\frac{2}{3}$ | 1 $\frac{1}{18}$ |
| \ $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{36}$ |
| \ $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{72}$ |
| \ $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{144}$. |

Si sceglie di proseguire il calcolo dopo aver moltiplicato il numero assegnato per 144. Si effettua dunque il prodotto sui singoli addendi:

| | |
|---|---|
| \ 1 | 144 |
| \ $\frac{1}{3}$ | 48 |
| \ $\frac{1}{4}$ | 36 |
| Total | 228. |

Ciò significa che, nell'enunciato del problema, le porzioni del mucchio sono state interpretate come porzioni di 144. La loro somma è 228. Adesso, parallelamente, si moltiplicano per 144 anche le frazioni della prima fase, ottenendo, nell'ordine, 152, 76, 38, 19. La loro somma è 285. Il resto è la differenza tra $288 (= 2 \cdot 144)$ e 285, ossia 3. Quindi il resto effettivo (precedente alla moltiplicazione per 144) è $\frac{3}{144}$. Si tratta di determinare a quale porzione del numero assegnato $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ esso corrisponda. Si ricorda, a tal proposito, che $(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})144 = 228$, dunque $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{228}{144}$. Quindi, moltiplicando tale numero per $\frac{1}{228}$ e poi per la frazione doppia, ossia $\frac{1}{114}$ si ottiene, come somma, $\frac{1}{144}+\frac{1}{72}=\frac{3}{144}$. In breve:

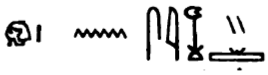
Seconda fase:

| | |
|---|---|
| $\backslash\ \frac{1}{228}$ | $\frac{1}{144}$ |
| $\backslash\ \frac{1}{114}$ | $\frac{1}{72}$ |

Il numero cercato è quindi la somma delle frazioni ottenute nelle due fasi, ossia:

$$1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{114}+\frac{1}{228}.$$

Segue la verifica:



Inizio della prova

| | |
|---|---|
| $\backslash\ 1$ | $\boxed{1}\ \boxed{\frac{1}{6}}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{114}\ \frac{1}{228}$ |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{171}\ \frac{1}{342}$ |
| $\backslash\ \frac{1}{3}$ | $\boxed{\frac{1}{3}}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{342}\ \frac{1}{684}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{228}\ \frac{1}{456}$ |
| $\backslash\ \frac{1}{4}$ | $\boxed{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{456}\ \frac{1}{912}$. |

Il prodotto del numero assegnato per il numero ottenuto è la somma delle frazioni della parte destra, situate nelle tre righe segnate dalla spunta. Lo scriba riesce, in prima battuta, solo a sommare quelle nei riquadri, ricavando $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Determina quindi il complemento al prodotto voluto, ossia 2, e trova $\frac{1}{4}$. Deve dunque provare che questa è la somma delle frazioni tralasciate, ossia:

$$\frac{1}{12}\quad \frac{1}{114}\quad \frac{1}{228}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{36}\quad \frac{1}{342}\quad \frac{1}{684}\quad \frac{1}{24}\quad \frac{1}{48}\quad \frac{1}{456}\quad \frac{1}{912},$$

e, a tal fine, le moltiplica per 912, ottenendo:

$$76\quad 8\quad 4\quad 50\ \tfrac{2}{3}\quad 25\ \tfrac{1}{3}\quad 2\ \tfrac{2}{3}\quad 1\ \tfrac{1}{3}\quad 38\quad 19\quad 2\quad 1,$$

la cui somma è 228. Verifica dunque che questo sia, in effetti, un quarto di 912, con il solito metodo:

| | |
|---|---|
| 1 | 912 |
| ½ | 456 |
| ¼ | 228. |

Problema 39  (*tunnu*)

Il *tunnu* riguarda problemi di ripartizione. Il termine indica la differenza, risultante dal confronto tra le parti disuguali della distribuzione di una certa quantità di beni tra un dato numero di persone.
Nel problema in questione si chiede di trovare la differenza tra le parti spettanti ai componenti di due gruppi di persone, formati rispettivamente da 4 e da 6 individui, nel momento in cui vengono equamente distribuiti, al loro interno, due lotti di 50 pani. Il procedimento consiste nella divisione di 50 per 4 e per 6, e si conclude con la sottrazione del secondo quoziente dal primo. Le divisioni vengono eseguite come moltiplicazioni lette al contrario: il divisore viene moltiplicato per diversi fattori, che vengono poi opportunamente raggruppati. Tali fattori, ancora una volta, sono frazioni unitarie o la frazione $\frac{2}{3}$ (utilizzate alla fine, in presenza di piccoli resti che completano al dividendo il numero sino ad allora ottenuto), e, soprattutto, numeri interi: privilegiati sono le potenze di due (ottenute per successivi raddoppiamenti), il 10, ed, in generale, i numeri ottenuti dai precedenti per dimezzamento. Ecco il dettaglio delle divisioni del Problema 39:
Divisione di 50 per 4:

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| \\10 | 40 |
| \\2 | 8 |
| \\½ | 2 |
| 12 ½. | |

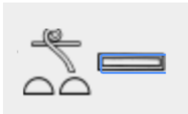
Divisione di 50 per 6:

| | |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 12 |
| 4 | 24 |
| \\8 | 48 |
| \\⅓ | 2 |
| 8 ⅓. | |

La differenza cercata è $12\frac{1}{2} - 8\frac{1}{3} = 4\frac{1}{6}$.

**Problemi geometrici**

I problemi di geometria riguardano il calcolo di aree e volumi. L’unità di misura delle lunghezze dei campi è il *khet* (ramo, legno): 

Corrisponde a 100 cubiti. Il suo quadrato è solitamente impiegato come unità di misura delle aree; a volte questa è sottintesa, altrimenti è denotata *setat*: 

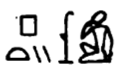
In questa grafia, ai tre caratteri con valenza consonantica si aggiunge il geroglifico del “bacino”, come determinativo della terra irrigata. Il più delle volte, la misura dell’area è indicata da un numero seguito dall’espressione indicante il campo coltivato: 

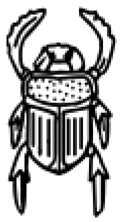
Si notino le tre barre del plurale e il determinativo  (non sempre presente) che significa *riva* e che denota le regioni.

<u>Problema 49</u> (area del rettangolo)

Metodo per calcolare l’area: se si dice a te un rettangolo di terreno di *khet*

10 per *khet* 2 cos’è la sua area? Fai come accade.

Prima di addentrarci nel metodo risolutivo, qualche considerazione preliminare sulla lingua. Anzitutto si può notare il determinativo della riva nell’espressione del rettangolo. Secondariamente, la duplice presenza di *mi* , nel senso letterale di “come”, sottolinea il carattere esemplificativo dell’esposizione, incentrata sull’imitazione del modello proposto. A questo proposito merita attenzione anche l’interrogativo *peter* : una domanda che unisce l’esigenza del pensiero, messa in evidenza dal determinativo finale (l’uomo che porta la mano alla bocca, il gesto tipico di chi riflette) con quella della percezione visiva, che è chiamata ad essere fonte di persuasione, con un invito a “mostrare” il procedimento risolutivo. Questo collegamento è rivelato ancora una volta dalla lingua: il termine in questione è infatti considerato semanticamente imparentato con una parola dal suono simile, e il cui significato è *vedere*. 

Infine, non si può non menzionare lo scarabeo, *kheper*, simbolo del dio Sole: 

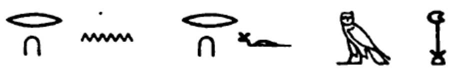
Il suo significato come predicato è molteplice, ed abbraccia tutte le sfumature semantiche tra l'*essere* e il *creare*; compare frequentemente nelle espressioni indicanti una *trasformazione*, perché l'idea soggiacente è la consistenza fisica, la corporeità, concretamente presente, e soggetta a divenire: *kheperu* sono le persone viventi, *kheper-t* le cose esistenti.

Veniamo ora alla soluzione del problema. Il procedimento inizia con una moltiplicazione:

| | |
|---|---|
| . | 1000 |
| 10 | 10000 |
| 100 | 100000 |

E prosegue così:

1/10 di 100000 : 10000



1/10 del suo decimo : 1000

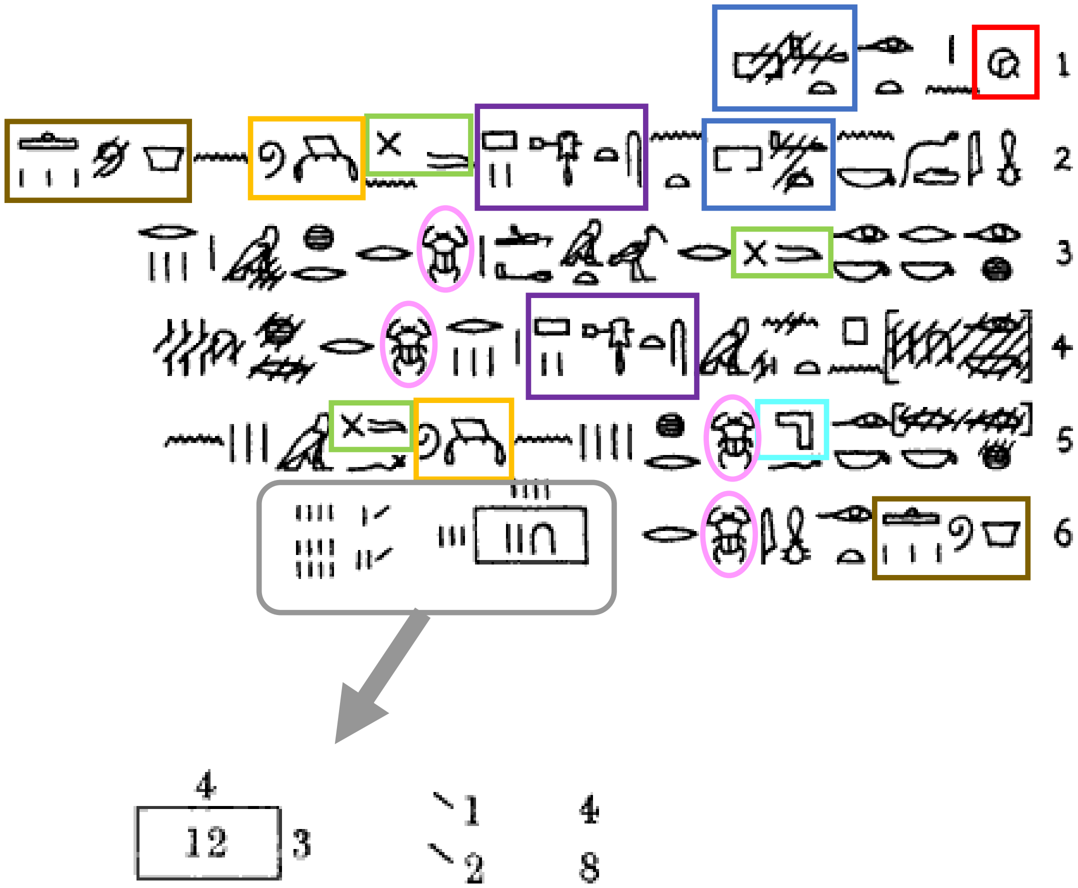
Questo è nell' area.

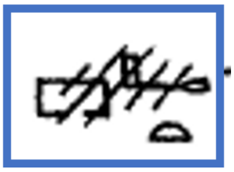
Il calcolo risulta difficilmente comprensibile. Anzitutto occorre osservare che probabilmente l'enunciato contiene un errore di trascrizione. Il 2 dovrebbe essere sostituito da un 1. Una volta effettuata questa correzione, il resto si può spiegare come segue. I 10 *khet* del lato più lungo vengono interpretati come 1000 cubiti, il *khet* dell'altro lato come 100 cubiti. Quindi i 1000 cubiti vengono moltiplicati per 100, ottenendo come risultato 100000. Questi sarebbero 100000 quadrati di 1 cubito di lato, ma anziché usare questi, l'autore del testo preferisce una suddivisione dell'area in 1000 strisce aventi come lunghezza 1 *khet* e larghezza 1 cubito: a tal fine il numero precedentemente ottenuto deve essere diviso per 100.
In questo procedimento il calcolo dell'area risulta da una decomposizione del rettangolo in elementi uguali, aventi una misura ed una forma particolari.

Tuttavia, la struttura soggiacente al ragionamento geometrico non è sempre *interna* alla figura; nel seguente esempio, tratto dal papiro di Mosca, si interviene sul rettangolo dall'*esterno,* sottoponendolo ad una dilatazione. Com'è tipico dei problemi mesopotamici inversi, ogniqualvolta si tratti di determinare un lato a partire dall'area, si riconduce il quesito ad un quadrato di area nota, in modo da poter trovare la risposta effettuando l'estrazione di una radice quadrata. In sintesi, nel nostro attuale linguaggio, il testo è il seguente:

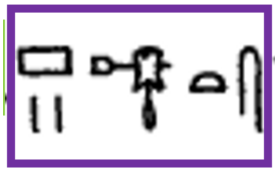
*Data un'area di 12 unità di superficie, la cui larghezza è pari a ¾ della lunghezza, si determini il lato. Si calcoli il numero con cui occorre moltiplicare ¾ per ottenere 1. Il risultato è 1 1/3. Si moltiplichi 12 per 1 1/3, si otterrà 16. Da 16 si estragga la radice quadrata: si ricava 4, la lunghezza, mentre la larghezza, pari ai suoi ¾, è 3. Segue la verifica: il prodotto di 4 e 3 è 12.*

Riportiamo una trascrizione del testo originale:

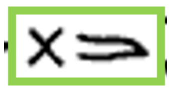


campo, area delimitata



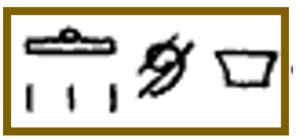
area di misura 12 (gruppo di geroglifici raro)



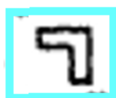
¾, espressi come $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$

introduce il risultato di un’operazione

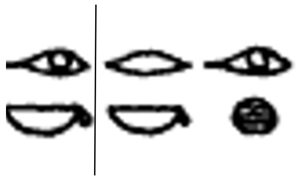
lunghezza (il carattere a destra indica la metà di un costato)



larghezza (*wskh*)



radice quadrata (*qnbt*, angolo)

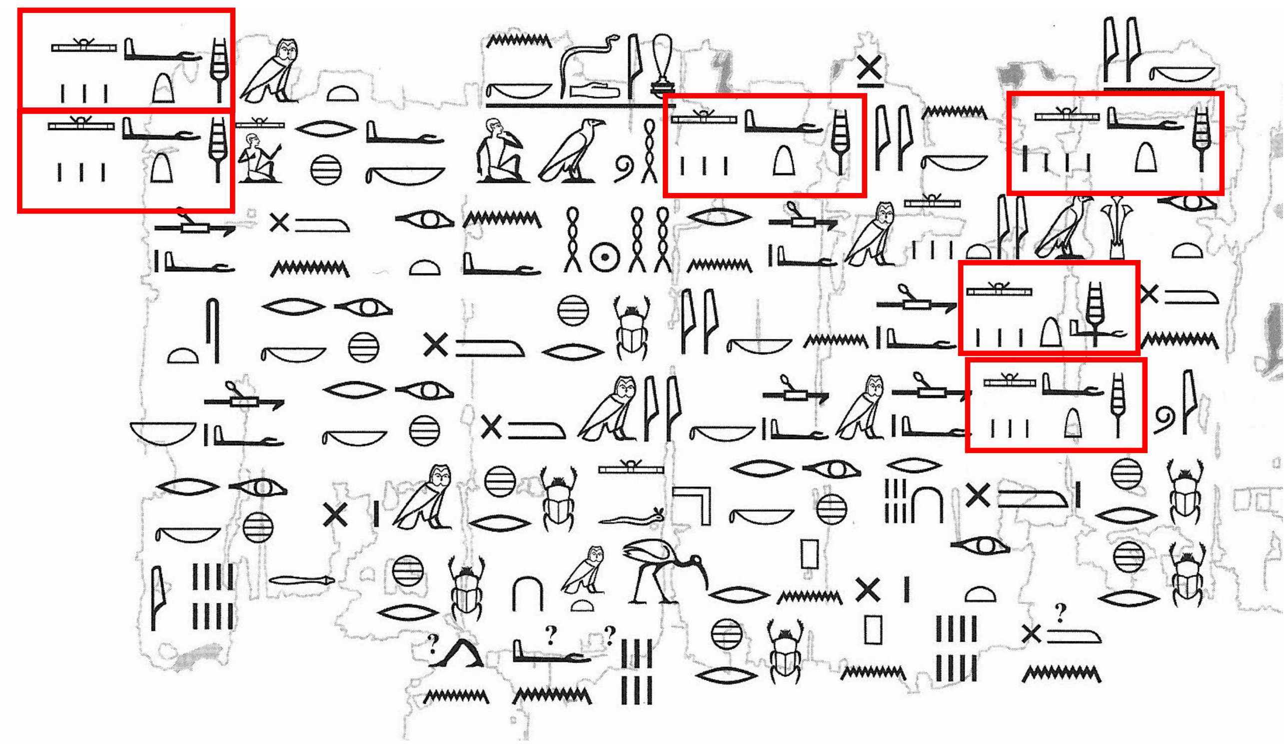
Aggiungiamo inoltre che il gruppo  si legge (da destra a sinistra) *tu fai* | *quindi* (il verbo fare è indicato dall'occhio, ad ulteriore conferma di quanto la pratica matematica sia legata alla concretezza, all'evidenza). Il carattere  viene usato come *per* ma anche come *di*, e  svolge la funzione di suffisso possessivo.

Per venire al ragionamento risolutivo: viene prima determinata la proporzione fra il lato più lungo (lunghezza) e quello più corto (larghezza), calcolando quello che per noi è il reciproco di 3/4, ossia 4/3. Questo è il fattore di cui occorre dilatare la larghezza in modo tale da trasformare il rettangolo in un quadrato. L'area del quadrato così ottenuto si ottiene moltiplicando l'area assegnata per 4/3, ed è pari a 16. Il suo lato è uguale alla lunghezza, e la sua misura è 4. I ¾ di questa sono la larghezza, ossia 3.

Questo approccio, interamente geometrico, si discosta nettamente dal metodo algebrico che seguiremmo noi oggi: imposteremmo un'equazione di secondo grado, in cui il termine noto è l'area assegnata,  l'incognita è la lunghezza e compare al quadrato, dotata del coefficiente ¾:

$$12 = \frac{3}{4}x^2.$$

In un'altra fonte, il papiro di Berlino 6619, si incontra un altro problema di formulazione geometrica, che, nella nostra visione, si tradurrebbe in un'equazione di secondo grado. Prima di entrare nel merito, si può dare un'occhiata alla sua trascrizione geroglifica, che a prima vista, contiene già un elemento rivelatore:



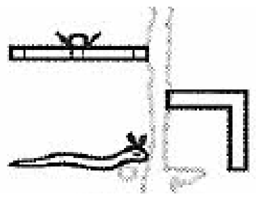
Compare diverse volte l'*aḥa*. Ciò suggerisce che la tecnica impiegata sia la falsa posizione. In effetti il procedimento (in parte ricostruito, in quanto l'originale è mancante di alcuni frammenti) è il seguente.

La somma di due aree di quadrati è 100 cubiti quadrati, il lato dell'uno è pari a $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ di quello dell'altro. Determinare le quantità ignote (i lati dei quadrati). Se la maggiore delle due è 1, l'altra sarebbe $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. L'area del quadrato più piccolo si ottiene elevando quest'ultimo numero al quadrato. Si ottiene $\frac{1}{2}\frac{1}{16}$. Dunque l'area complessiva è $1\frac{1}{2}\frac{1}{16}$. Estraendone la radice quadrata si ricava $1\frac{1}{4}$. Si estrae quindi la radice quadrata di 100, che è 10. Il primo valore è il lato del quadrato avente come area quella complessiva derivante dall'aver posto uguale a 1 il lato del quadrato maggiore (una delle due quantità ignote). Il secondo valore è il lato del quadrato avente come area l'area complessiva assegnata. A questo punto si determina il numero con cui moltiplicare $1\frac{1}{4}$ al fine di ottenere 10. Si trova 8. Questa è il vero valore della quantità ignota maggiore. Quella minore è pertanto 6.

Per noi, detti $x$ e $y$ i valori incogniti, il problema si tradurrebbe nel seguente sistema, riducibile, mediante sostituzione, ad un'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 100 \\ y & = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

L'autore egizio ricorre invece ad una proporzione. Ricompare qui l'idea di rappresentare l'area assegnata mediante un quadrato, del quale si determina quindi il lato mediante l'estrazione di una radice quadrata.



*La sua radice quadrata*: il geroglifico dell'angolo (con due bracci uguali) è accompagnato dal determinativo del calcolo e dal suffisso possessivo *f*.

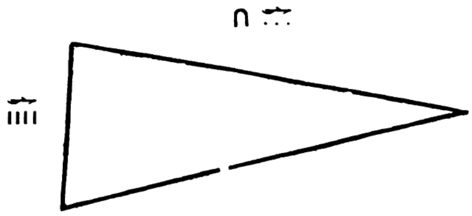
Un problema di interpretazione (con una suggestiva proposta di soluzione) riguarda il metodo di calcolo dell'area del triangolo. A tale fine è utile confrontare due fonti diverse: il papiro di Rhind e il papiro di Mosca, da cui provengono, nell'ordine, i prossimi due problemi presentati.

Problema 51 (area del triangolo)

Metodo per fare un triangolo in un campo. Se danno a te un triangolo

di *khet* 10 di fianco, *khet* 4 di base. Cos'è la sua area?

Il testo è corredato di un disegno:



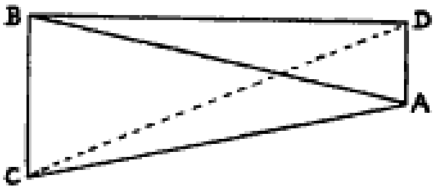
Il procedimento prevede, semplicemente, di moltiplicare la metà della base (2) per la misura del *fianco* (10), così da ottenere 20 *setat*.
Ora, guardando la figura, verrebbe da pensare che il *fianco* sia da intendere come il lato riprodotto nella parte superiore; dunque la formula applicata sarebbe inesatta, corretta solo per un triangolo rettangolo, vera solo con una certa approssimazione per un triangolo qualunque. A precisare il significato del *fianco* non aiuta, almeno a prima vista, nemmeno l'osservazione dell'espressione geroglifica del triangolo, che contiene l'immagine di un triangolo isoscele. D'altra parte, il nome dato alla *base* è letteralmente, *bocca*, e quindi neanch'esso contribuisce a fare chiarezza. Più utile può essere indagare intorno al significato corrente dell'espressione da noi tradotta come *fianco*, nel senso di *lato obliquo*, come lo hanno inteso vari autori.
Nel papiro di Mosca (Problema 7) il quadro è apparentemente confuso dal fatto che il carattere del triangolo sembra fare esplicito riferimento ad un triangolo scaleno:

Tuttavia, ad essere rivelatori sono, da un lato, il procedimento risolutivo, dall'altro il confronto fra la parola *fianco* e la parola, che qui in qualche modo pare sostituirla, che è  ed indica la *riva*.

L'enunciato recita più o meno così: assegnato un campo triangolare di area 20, la riva è $2\frac{1}{2}$. Si tratta di determinare la lunghezza e la larghezza. La soluzione prevede di raddoppiare l'area (40), moltiplicarla per $2\frac{1}{2}$ (100), ed estrarne la radice quadrata (10). Quindi si determina il reciproco di $2\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}\frac{1}{15}$). Questo viene moltiplicato per 10. Si ottiene 4. Le misure di lunghezza e larghezza sono rispettivamente 10 e 4.

L'unica interpretazione ragionevole del dato $2\frac{1}{2}$ lo vede come rapporto tra la lunghezza e la larghezza (vedi calcolo conclusivo). D'altra parte l'iniziale raddoppiamento dell'area fa pensare alla costruzione di un rettangolo per duplicazione del triangolo. Si direbbe che tale rettangolo abbia la stessa lunghezza e larghezza del rettangolo, e che venga quindi trasformato in un quadrato tramite dilatazione della larghezza di un fattore $2\frac{1}{2}$. Questo quadrato avrà area 100 e lato 10. La larghezza richiesta si trova allora moltiplicando questa misura per il reciproco di $2\frac{1}{2}$.

Alla luce del problema precedente, non c'è dubbio che *lunghezza* e *larghezza* vadano intese come le nostre *base* ed *altezza*. D'altra parte, il termine *riva*, usato per indicare il rapporto tra queste misure, consente di inquadrare meglio il termine *fianco* del problema precedente. Tra i suoi significati figura infatti anche quello di *diga*, di *camminamento* che collega le due rive di un fiume. Al di sotto di questa linea orizzontale, la *riva*, solitamente, presenta un profilo digradante verso l'alveo. Questa può ben rappresentare un lato di un triangolo e, contemporaneamente, esprimere la proporzione tra la base e l'altezza del triangolo (nella figura, nell'ordine, i segmenti *BC* e *BD*, rispetto al triangolo *ABC*), tramite la sua "pendenza":




Nel caso appena esaminato, la figura riportata sul papiro, a causa della sua inaccuratezza, risulta fuorviante ai fini dell'interpretazione del ragionamento. Suggerisce infatti una lettura improntata all'approssimazione. La situazione è diametralmente opposta nel caso del problema seguente, riguardante il calcolo dell'area del cerchio. L'apparente imprecisione del disegno va investigata, non per correggerla, ma per prenderla alla lettera. Ancora una volta, dentro le pieghe di un'incongruenza si nasconde la chiave d'accesso ad una verità nascosta dietro al testo, ivi non esplicitata, ma ricostruibile sulla base di singoli indizi. La fonte è nuovamente il papiro di Rhind.

Problema 50 (area del cerchio)

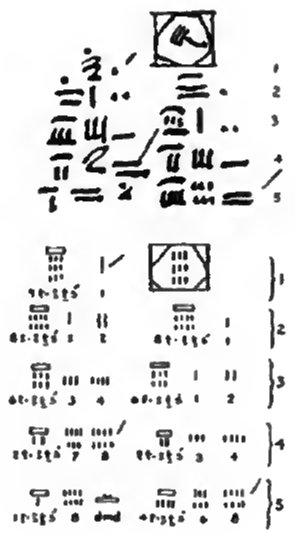
Viene determinata l’area di un cerchio di diametro pari a 9 *khet,* calcolando 8/9 di 9 e quindi elevando il risultato al quadrato. Si ottiene 64.

Questo metodo corrisponderebbe alla seguente formula per l’area del cerchio in funzione del diametro *d*:

$$A = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

Tenendo conto che il coefficiente della formula esatta è $\frac{\pi}{4}$ , se ne ricava una approssimazione per $\pi$ pari a $\frac{256}{81} \approx$ 3.16. Viene da chiedersi da dove provenga questo valore. Un appiglio è stato trovato dagli studiosi nel precedente

Problema 48 (area del cerchio e di?)

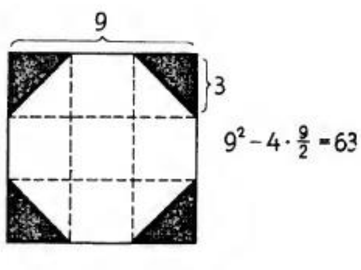


Il testo è limitato ad una figura seguita da due tabelle numeriche

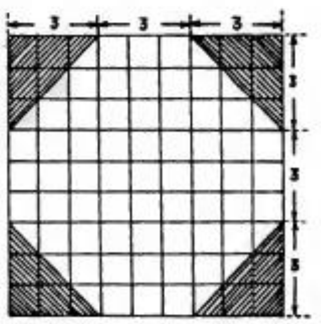
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | \1 | 9 |
| 2 | 16 | 2 | 18 |
| 4 | 32 | 4 | 36 |
| \8 | 64 | \8 | 72 |
| | | Total: | 81 |

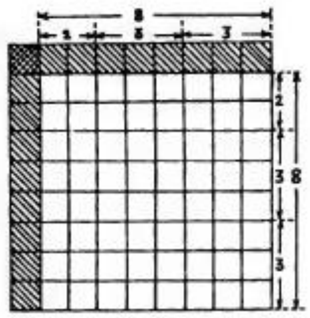
Vengono messi a confronto i quadrati di 8 e di 9. Nella figura compare al centro un 9. La cornice esterna indica quasi sicuramente un quadrato. La seconda colonna potrebbe riferirsi alla sua area, se si prende 9 come misura del lato.

Rimane da interpretare il primo calcolo. Si è a lungo pensato che la figura inscritta fosse un cerchio, e che 64 rappresentasse la sua area. In questo modo si avrebbe riscontro alla formula utilizzata nel Problema 50, che prevede un rapporto di 64:81 tra l’area del cerchio e quella del quadrato circoscritto. Tuttavia mancherebbe ancora una giustificazione. Il passo successivo può consistere nel considerare un ottagono al posto del cerchio, un’interpretazione più aderente all’immagine, in cui compare, a ben vedere, una linea spezzata e non curva. Ciò ha suggerito la seguente ricostruzione, basata sulla suddivisione delle aree in elementi quadrati:



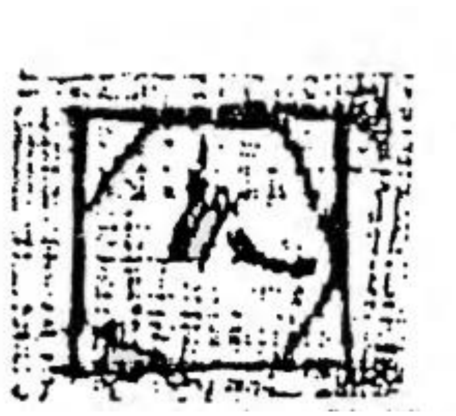
L’ottagono inscritto ha area pari a 63. Viene però preso il numero 64, che è il suo quadrato più vicino. In questo modo l’area del cerchio potrebbe essere interpretata come coincidente, pressappoco, con quella di un quadrato di lato pari ad 8/9 del suo diametro. Questa spiegazione può essere resa più convincente, introducendo una suddivisione più fine, ed aggiungendo un procedimento di *taglia e cuci*. Un autore ha suggerito una griglia di quadratini unitari:





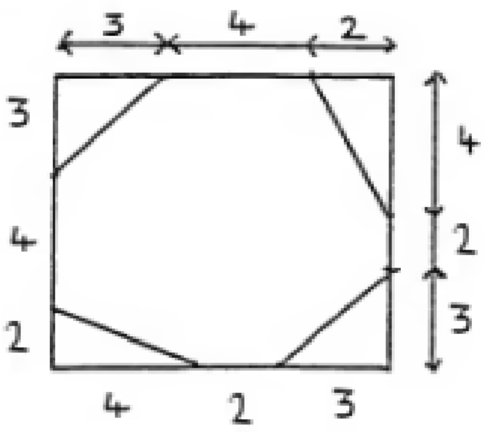
Si passa dalla prima alla seconda figura ridistribuendo i “vuoti”: le aree mancanti nella parte inferiore vengono ricomposte in modo da formare una striscia di 9 quadratini sul lato sinistro, mentre le aree mancanti della parte superiore vengono a formare la prima riga. Si crea un errore di un’unità, in quanto nell’angolo superiore sinistra vengono a sovrapporsi due vuoti. In questo mondo l’area risultante – di un quadrato di lato 8- risulta maggiore di un’unità rispetto a quella iniziale dell’ottagono. Benché questa ricostruzione sia più plausibile, in quanto rende esplicitamente visibile il quadrato di area 64, rimane, quale elemento un po’ arbitrario, quel quadratino trascurato. Anche questa difficoltà può essere superata mettendo meglio a fuoco l’immagine del Problema 48:

Dall’ingrandimento risulta una certa asimmetria rispetto all’ottagono che alcuni autori hanno creduto di vedervi. E qualcuno ha deciso di ricopiare la figura in maniera più fedele.

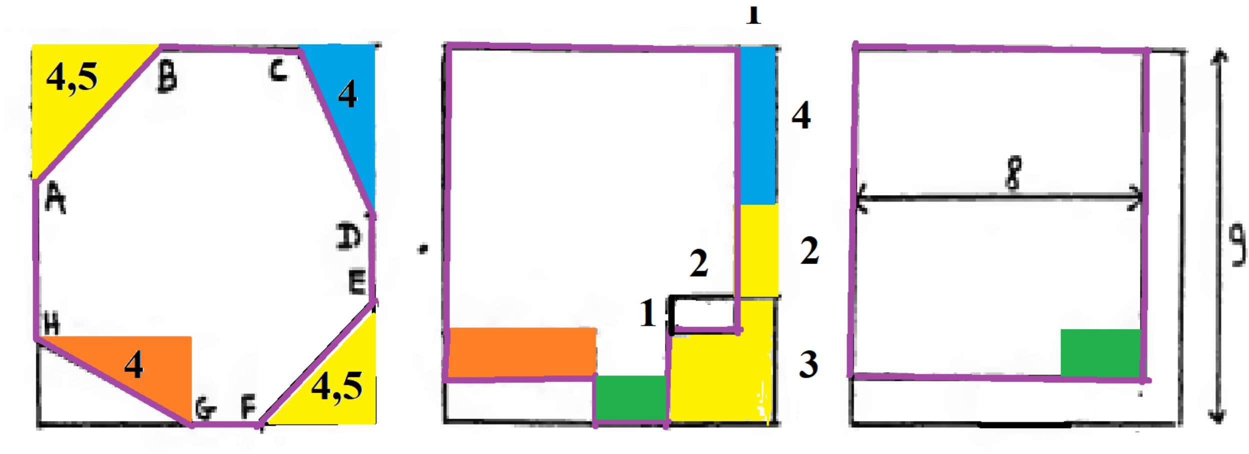


L’ottagono centrale ha esattamente area pari a 64, in quanto:

$$81-3^2-2\cdot 4=64.$$

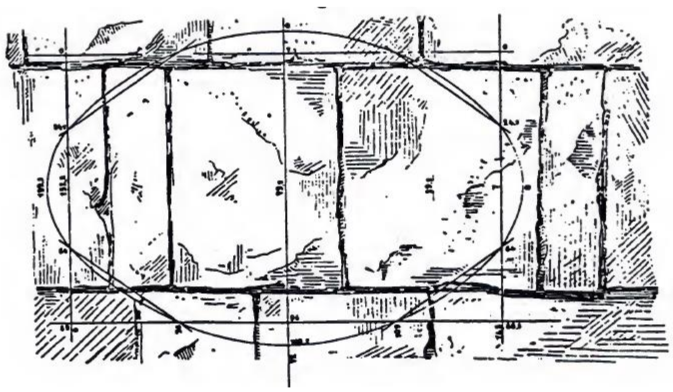


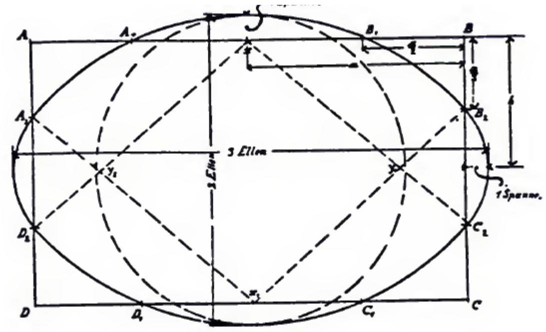

Ridistribuendo frammenti di aree esterne ed interne all’ottagono si riesce ancora, sia pure in maniera più complessa e creativa, a ricostruire un quadrato di lato 8. Il contorno della figura, ad ogni passo, è segnato in viola.

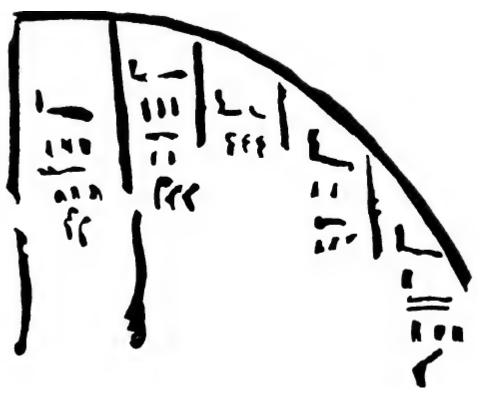


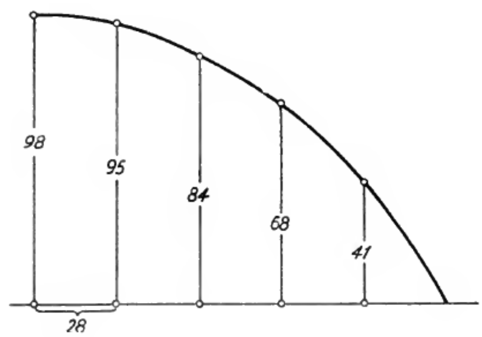

Si può anche osservare che $(1-\frac{1}{9})^2$ è, tra i numeri della forma $(1-\frac{1}{n})^2$, la migliore approssimazione di $\frac{\pi}{4}$.

Un'osservazione a margine: l'approssimazione di linee curve mediante il ricorso a linee ausiliarie poligonali è una tecnica effettivamente applicata dagli Egizi. Ne sono testimonianza due reperti (un disegno riportato su una parete del Tempio di Luxor ed uno schizzo su pietra), in cui si notano i tentativi di tracciare quella che sembra un'ellisse i cui semiassi sono in rapporto 3:2, e una curva determinata da una successione di punti definiti da altrettante "ordinate" corrispondenti ad intervalli uguali sull'asse delle "ascisse". Nelle figure sottostanti, le copie degli originali e le loro interpretazioni:







L'interesse per la determinazione dell'area del cerchio è legata a problemi volumetrici, dato che le unità di misura per i liquidi o i cereali corrispondevano a recipienti cilindrici. Di questa forma erano anche alcuni granai.

**Units of Volume**

| Names | | | Equivalents | | |
|---|---|---|---|---|---|
| English | Egyptian | | Heqats | Ro | Metric |
| Ro | | *r* | 1/320 | 1 | 0.015 L |
| Dja | | *dja* | 1/16 | 20[43] | 0.30 L |
| Jar<br>Hinu | | *hnw* | 1/10 | 32 | 0.48 L |
| Barrel<br>Heqat<br>Hekat | | *hqt* | 1 | 320 | 4.8 L |
| Double Barrel<br>Double Heqat<br>Double Hekat | | *hqty* | 2 | 640 | 9.6 L |
| Quadruple Heqat (MK)[44]<br>Oipe[45] (NK)[44] | | *hqt-fdw*<br>*jpt*[19]<br>*ipt*[44] | 4 | 1,280 | 19.2 L |
| Sack<br>Khar | | *khar* | 20 (MK)<br>16 (NK)[46] | 6,400 (MK)<br>5120 (NK) | 96.5 L (MK)<br>76.8 L (NK)[46] |
| Deny<br>Cubic cubit | | *deny* | 30 | 9,600 | 144 L |

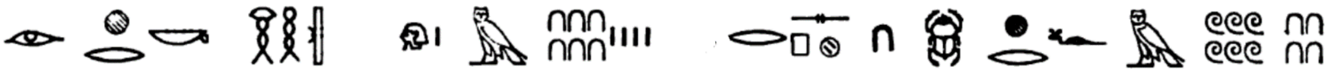
La misura principale è l'*hekat* o *heqat* (rappresentato da un barile coricato da cui fuoriescono dei grani), quella utilizzata per le grandi quantità è il *khar*, corrispondente a 20 *heqat*. Ricordiamo però che la misura lineare di riferimento è il cubito: la conversione dei cubiti cubi in *khar* avviene tramite moltiplicazione per $1\frac{1}{2}$.

Nel problema seguente, la conversione viene effettuata al termine del calcolo. La formula utilizzata per il volume del cilindro prevede di moltiplicare l'area del cerchio (pari a $\frac{64}{81}$ volte il quadrato del diametro) per la misura dell'altezza.

<u>Problema 41</u> (volume del cilindro)

Metodo per fare un silo rotondo di 9 10 sottrai tu 1/9 da 9 :

1 resto 8 moltiplica ciò : 8 volte 8 dà 64



Fai tu moltiplicare ciò : 64 volte 10 dà : 640

Poni la sua metà, il suo intero, dà : 960 il suo contenuto nel corpo.

Il silo ha una sezione circolare di diametro 9 cubiti ed altezza 10 cubiti. Dai cubiti viene sottratta la loro nona parte: si ottiene 8, che viene elevato al quadrato. Si ottiene 64, che è il valore dell'area della base in cubiti quadrati: infatti questo è il valore risultante dalla formula $\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$ quando $d = 9$. Tale numero viene quindi moltiplicato per 10, onde ottenere il volume del cilindro in cubiti cubi. Si ottiene 640, da cui si ricava il numero di *khar* moltiplicando per $1\frac{1}{2}$.

In simboli, il procedimento è riassunto dall'espressione seguente:

$$\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 h \cdot \frac{3}{2}$$

Nel <u>Problema 43</u>, di analoga formulazione, viene però applicato un procedimento diverso, basato sull'espressione:

$$\left(d + \frac{1}{3}d\right)^2 \frac{2}{3}h$$

Si può verificare che le due espressioni, in realtà, sono equivalenti. Ci si può chiedere come questa equivalenza sia stata stabilita dagli Egizi. Allo stato attuale non si conosce la risposta. Certo è che non può trattarsi di una coincidenza casuale, constatata sulla base di un'uguaglianza fra risultati: i dati del secondo problema sono diversi da quelli del primo (cambia l'altezza, che passa da 10 a 6).
Ciò fa ritenere che, dietro il calcolo numerico riferito ad un caso particolare, si nasconda in generale un ragionamento astratto, un *metodo* di cui il procedimento risolutivo è per l'appunto, solo un

*esempio*, che deve fungere da *modello*. Si noti, a tal proposito, l'uso dell'espressione  anche per indicare il numero trovato (e riutilizzato) nel corso del calcolo.

Questa totale assenza di riferimenti espliciti al campo di applicabilità del procedimento può, talvolta, creare ambiguità che mettono in imbarazzo il lettore di oggi. Un caso famoso e controverso riguarda il Problema 10 del papiro di Mosca, di cui non è certo l'oggetto. Non si sa, precisamente, la natura della superficie (un semicerchio? una semisfera? un semicilindro?) di cui si voglia determinare l'area. L'oggetto del quesito è infatti indicato semplicemente come un *cesto*, la cui forma è paragonata a quella di un *mezzo guscio d'uovo*. È assegnata una sola misura, $4\frac{1}{2}$ riferita (simultaneamente?) a due dimensioni: una *bocca* ed una *altezza*. Il calcolo effettuato corrisponde alla formula

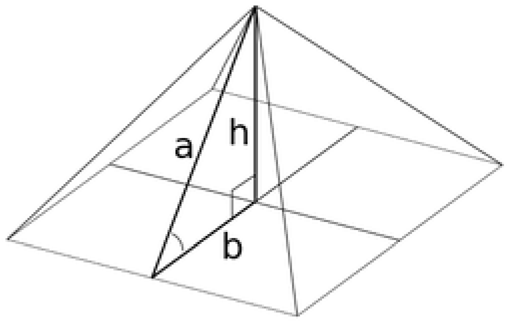
$$\left(1-\frac{1}{9}\right)8\cdot 4\frac{1}{2}.$$

Una volta ricordato che per gli Egizi, il nostro $\frac{\pi}{4}$ corrisponde a $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, tale formula si può interpretare nei seguenti tre modi:

- $\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 9\cdot 4\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}2d\cdot h=\frac{\pi d}{2}\cdot h$ , area della superficie del (mezzo) cilindro di diametro $d$ ed altezza $h$ entrambi pari a $4\frac{1}{2}$;
- $\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 9\cdot 4\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}2d\cdot d=\frac{\pi d^2}{2}=\frac{4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2}$, area della superficie della semisfera di diametro $d=4\frac{1}{2}$;
- $\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 9\cdot 4\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}d\cdot\frac{d}{2}=\frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2}$, area del semicerchio di diametro $d=9$.

La seconda versione è la più dubbia, non essendo presenti altre testimonianze della conoscenza da parte degli Egizi della formula per la superficie della sfera (superficie non srotolabile). Né, d'altronde, si ha riscontro dell'effettiva utilità pratica di un simile calcolo, nonostante le ceste fossero probabilmente proprio di quella forma:

Gli Egizi conoscevano il metodo per il calcolo del volume del (tronco) della piramide a base quadrata, oltre, naturalmente, a quello per il volume del parallelepipedo, a cui sono dedicati i problemi 44-46 del papiro di Rhind. Delle piramidi era spesso assegnato un dato noto come *seket*, pari al reciproco di quella che per noi è la pendenza, e quindi, con la notazione della figura, uguale al quoziente $\frac{b}{h}$ , essendo $b$ la metà del lato della base.




Riportiamo di seguito la traduzione di un problema del papiro di Rhind.

*Problem 57*

*If the* seked *of a pyramid is* 5 *palms* 1 *finger per cubit and the side of its base* 140 *cubits, what is its altitude?*

Divide 1 cubit by the *seked* doubled, which is 10 ½. Multiply 10 ½ so as to get 7, for this is a cubit: 7 is ⅔ of 10 ½. Operate on 140, which is the side of the base: ⅔ of 140 is 93 ⅓. This is the altitude.

L'altezza si ottiene dividendo la metà della lunghezza della base per il *seked*, oppure, equivalentemente, la base per il doppio del *seked*. Naturalmente, occorre tenere conto delle unità di misura. Nello svolgimento del problema, l'autore converte il doppio del numeratore, assegnato nella forma di 5 palmi e 1 dito, in cubiti: ora, 10 palmi e due dita sono 10 palmi e mezzo. Poiché un cubito sono 7 palmi, il corrispondente valore in cubiti si ottiene dividendo per 7. In questo modo si ottiene il doppio del *seked* espresso come un rapporto tra misure in cubiti (il denominatore è 1). Siccome, però, il doppio del *seked* deve essere applicato alla base come divisore, è più conveniente calcolare direttamente il reciproco, effettuando la divisione inversa: 7 viene diviso per $10\frac{1}{2}$, e si ottiene $\frac{2}{3}$. Questo è il numero per il quale occorrerà moltiplicare la base, 140, al fine di ricavare l'altezza, ossia $93\frac{1}{3}$.